# Семинар №1. Методы доказательства теоретико-множественных тождеств

**Метод двух включений**

Рассмотрим доказательство тождества, выражающего свойство дистрибутивности объединения относительно пересечения:



Использовано то очевидное соображение, что если элемент принадлежит какому-то множеству, то он принадлежит объединению этого множества с любым другим.

Далее рассмотрим два случая:

1. 

Тогда x принадлежит объединению A с любым множеством, в частности,  .

2. 

Тогда, поскольку x принадлежит написанным выше объединениям, то .

Тождество доказано.

**Метод характеристических функций**

Докажем свойство ассоциативности операции симметрической разности:

.

Выведем характеристическую функцию левой части:



Мы видим, что в полученное выражение характеристические функции всех трех множества входят равноправно, и для получения характеристической функции правой части достаточно заметить следующее:

.

Первое равенство имеет место в силу очевидной коммутативности операции симметрической разности, а второе – в силу указанной выше равноправности вхождений характеристических функций множеств в выражение для характеристической функции левой части (одинаковая расстановка скобок во втором и третьем членах двойного равенства).

Самостоятельно предлагается доказать таким методом доказанную выше методом двух включений дистрибутивность объединения относительно пересечения.

**Метод эквивалентных преобразований**

Используя этот метод, можно преобразовывать левую и правую части тождества к одному и тому же выражению.

Докажем таким способом свойство дистрибутивности пересечения относительно симметрической разности (ср. с доказательством на стр. 37 Учебника):

.

Преобразуем левую часть:



Использовали также свойство ассоциативности пересечения, записав двойные пересечения без внутренних скобок.

Правая часть преобразуется с учетом тождеств (законов) Де Моргана (формулы (7) и (8) на стр. 35):



В каждой квадратной скобке раскрываем скобку с операцией объединения, пользуясь дистрибутивностью пересечения относительно объединения и опять-таки ассоциативностью пересечения:



Поскольку пересечение множества со своим дополнением пусто, то в итоге получим то же выражение, что и для левой части:



Тождество доказано.

Самостоятельно предлагается доказать таким же методом свойство ассоциативности симметрической разности, доказанное выше методом характеристических функций.

**Тождества с декартовым произведением**

Опираясь на легко проверяемое тождество

,

методом эквивалентных преобразований докажем тождество

,

Выражающее свойство дистрибутивности операции декартова произведения относительно операции разности (ср. с задачей 1.6).

Используя тождество

,

доказываемое аналогично тождеству с объединением (в конце параграфа 1.2, стр. 40), преобразуем левую часть:



Преобразование правой части:



Выражения в первой и третьей квадратных скобках дают, очевидно, пустое множество, и мы получили то же самое выражение, что и для левой части.

**Тождества, содержащие функции (отображения)**

Доказательство некоторых тождеств для отображений (задачи 1.7 и 1.8).

1. Пусть  . Доказать, что  .



Если объединение заменить пересечением, доказательство обратного включения не пройдет (элементы  и  не обязаны совпадать), и будет иметь место только включение  . Оно превратится в равенство, если  инъективно (и тогда ).

2) В условиях предыдущей задачи доказать, что (но здесь  ).



В данном случае очевидна обратимость каждой стрелки, и тождество доказано. Легко видеть, что оно сохранится и при замене объединения пересечением.

**Факультативный пример**: решение уравнения  с использованием критерия равенства множеств

 .

Имеем:

 ,

откуда

 .

Преобразуем 1-е пересечение:



откуда  .

Далее:



откуда  .

Итак,  . Это значит, что любое множество X, удовлетворяющее такому условию (и только такое), будет решением исходного уравнения.